Carl von Ossietzky
Universität
Oldenburg

Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)

Monte Carlo Methoden

Dietmar Pfeifer

Center für
lebenslanges
Lernen

Carl von Ossietzky
Universität
Oldenburg

Berufsbegleitender Masterstudiengang
Risikomanagement für Finanzdienstleister (M. Sc.)

Dietmar Pfeifer

Monte Carlo Methoden

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2022

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Akademischer Werdegang

— 1971-1977 Diplom-Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen

— 1977-1986 Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen

— 1980 Promotion zum Dr.rer.nat.

— 1984 Habilitation für Mathematik an der RWTH Aachen

— 1986-1987 Heisenberg-Stipendiat, diverse Gastaufenthalte in den USA

— 1987 Ernennung zum Universitätsprofessor (C3) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften]

— 1995 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Hamburg [Versicherungsmathematik]

— 2000 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie]

— 2016 Eintritt in den Ruhestand

Akademische Nebentätigkeiten

— 1991-1995 Dozent an der Berufsakademie Oldenburger Münsterland e.V., Vechta

— 2003-2007 Mitglied des Vorstands der DGVFM (Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik)

— 2007-2013 Dozent für die Deutsche Aktuarvereinigung im Bereich Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden

— 2009-2013 Mitglied im Leitungsteam der ASTIN-Fachgruppe der DAV

Sonstige Nebentätigkeiten

— 1996-2016 Wissenschaftlicher Berater für AON Benfield, Hamburg (ehemals Jauch & Hübener)

— seit 2006 Mitglied des Aufsichtsrats der GVO Versicherung Oldenburg

— 2007-2014 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung acs actuarial solutions GmbH, Hamburg

— 2014-2018 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung eAs efficient actuarial solutions GmbH, Hamburg

— Seit 2019 Vorsitzender des Aufsichtsrats der GVO Versicherung Oldenburg

Aktuelle Schwerpunkte in der Forschung

Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie [insbesondere Copulas], Extremwertstatistik, Risikotheorie, Quantitatives Risikomanagement, aktuarielle Aspekte von Solvency II.

Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Monte Carlo Methoden

Im Rahmen des Moduls „Monte Carlo Methoden" erhalten Sie Einblicke in die Grundlagen der stochastischen Simulation verschiedenartiger Risiken, die in Banken und Versicherungsunternehmen eine wesentliche Rolle spielen. Monte Carlo Methoden sind insbesondere ein zentraler Bestandteil aller so genannten Internen Modelle, die sowohl unter Basel III als auch unter Solvency II zur unternehmensindividuellen Bestimmung von Eigenkapitalanforderungen eingesetzt werden können. Darüber hinaus lassen sich mit Monte Carlo Methoden auch potenzielle Auswirkungen strategischer Entscheidungen der Unternehmensleitung oder Auswirkungen von Risikominderungstechniken mit Hilfe geeigneter simulativer Computerprogramme darstellen.

Im Bankenbereich werden Monte Carlo Methoden unter anderem für die Quantifizierung operationeller Risiken im Rahmen des sogenannten „Advanced Measurement Approach" (AMA) eingesetzt; vgl. etwa Beekmann und Stemper (2014). Die Autoren führen hierzu (auszugsweise) aus:

„In der Praxis haben sich aus [den Anforderungen für den AMA] bisher im Wesentlichen als Möglichkeiten zur Quantifizierung [des operationellen Risikos] herauskristallisiert:

— Scorecardansatz,

— Szenariobasierter Ansatz,

— Verlustverteilungsansatz (LDA = Loss Distribution Approach).

… Der Verlustverteilungsansatz ist im Bankenumfeld am weitesten verbreitet und entstammt der Versicherungswirtschaft. Bei diesem Ansatz werden anhand der Verlustdaten Verteilungsfunktionen für Zufallsvariablen bestimmt, welche die Anzahl der Verluste sowie deren Höhe darstellen. Mit diesen Zufallsvariablen kann dann durch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie ein Wert für das operationelle Risiko ermittelt werden. …

Ziel des Modells ist es, aus den Schäden der Vergangenheit eine aggregierte Gesamtschadenshöhe zu bestimmen, die mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Dieser Wert wird als operationeller Value-at-Risk bezeichnet. …

Die Schwierigkeit besteht nun darin, die aggregierte Verlustverteilung zu ermitteln, wenn die Zufallsvariablen spezifiziert worden sind. Der Kern des AMA-Modells [ist] eine Monte-Carlo-Simulation. …

Nach Bestimmung der Verteilungsfunktionen für Schadenanzahl und Schadenhöhe wird die Monte-Carlo-Simulation durchgeführt, wobei Zufallszahlen entsprechend der Verteilungen generiert werden. Hierfür stehen ausreichende mathematische Methoden zur Verfügung. Bei der Monte-Carlo-Simulation wird eine hinreichend große Anzahl (mind. 1.000.000) an Szenarien simuliert, die jeweils die Gesamtschadensumme eines Jahres angeben. …"

Für den Versicherungsbereich führt Diers (2011) dazu analog (auszugsweise) aus:

> *„In Internen Modellen werden in der Regel die Verteilungen der versicherungstechnischen Risiken und der Kapitalanlagerisiken modelliert bzw. simuliert. Die sonstigen Risiken werden separat bewertet. …*

In der Schaden- und Unfallversicherung unterliegen nicht nur die Kapitalanlagerisiken, sondern auch die versicherungstechnischen Risiken sehr starken Schwankungen. Diese resultieren aus der hohen Volatilität des Gesamtschadenverlaufs – sowohl die Schadenhöhe als auch die Schadenfrequenz betreffend. So können beispielsweise Schadenereignisse aus Naturgefahren (z. B. Erdbeben, Stürme, Überschwemmungen, Hagel) oder Großschäden (z. B. durch Feuer) einen erheblichen Schadenaufwand verursachen. Deshalb sollten die Schäden stochastisch modelliert werden. Wir verstehen hier unter einem Internen Modell ein Simulationsmodell. Analytische Modelle können bei Schaden- und Unfallversicherern nicht sinnvoll eingesetzt werden, da eine Ergebnisverteilung inklusive einer adäquaten Abbildung der Rückversicherungsstruktur nur unter sehr einschränkenden und häufig unrealistischen Annahmen bestimmt werden kann. …

Eine zentrale Aufgabe des Internen Modells besteht in der Unterstützung einer umfassenden Rückversicherungssteuerung und des Rückversicherungscontrollings. Hierbei soll eine Überprüfung der Rückversicherungsparameter (Priorität, Haftung, Anzahl der Wiederauffüllungen, Jahreslimit, Ereignislimit, etc.) erfolgen und somit eine Effizienzanalyse der aktuellen oder von alternativen Rückversicherungsstrukturen durchgeführt werden. …

Einer der Grundpfeiler der Versicherungswirtschaft ist der »Ausgleich im Kollektiv und in der Zeit«. Der Diversifikationseffekt kann als quantitative Maßzahl für die Höhe des Ausgleichs zwischen modellierten Teilkollektiven verwendet werden. Dieser wird durch die Art und die Höhe der Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risiken (bzw. modellierten Teilsegmenten) beeinflusst. Die adäquate Abbildung von Abhängigkeiten ist eine essentielle Anforderung an ein Internes Modell. In Internen Modellen sollte die Möglichkeit bestehen, zwischen allen stochastischen Größen Abhängigkeiten vorzugeben. Dabei sollte man sich nicht nur auf lineare Abhängigkeitsstrukturen wie Korrelationen beschränken, sondern bei Bedarf auch nichtlineare Abhängigkeitsstrukturen verwenden, die z. B. im Tail eine verstärkte Abhängigkeit postulieren (z. B. Copulas, wie die Gumbel-Copula, …). …

Generell sollte in einem Internen Modell die Möglichkeit vorgesehen sein, dynamische, pfadabhängige Managementregeln zu implementieren. Dies sind Steuerungsregeln, die auf spezielle Situationen in einzelnen Szenarien reagieren und nicht in allen Simulationen umgesetzt werden. Sie berücksichtigen auch gesetzliche und bilanzielle Vorgaben und betreffen oftmals die Interaktion mehrerer Teilmodelle. …“

Diese exemplarisch gewählten Zitate zeigen, dass Monte Carlo Methoden heutzutage ein unerlässliches Hilfsmittel zur Bewertung von Bank- und Versicherungsrisiken bilden und damit zu fast allen anderen Modulen des Weiterbildungsstudiengangs „Risikomanagement für Finanzdienstleister“ enge Beziehungen aufweisen.

Wir beginnen dieses Modul mit der Beschreibung der mathematischen Erzeugung von „Pseudo-Zufallszahlen“, das sind rekursiv berechnete Zahlen im Intervall (0,1), die zwar eine innere deterministische Struktur haben, aber zumindest für den Betrachter als genügend „gleichmäßig verteilt“ und „zufällig“ erscheinen.

Die Kapitel 2 und 3 behandeln dann zwei verschiedene universelle Möglichkeiten, wie man allein durch die Verwendung von Standard-Zufallszahlen Zufallszahlen aus einer beliebigen statistischen Verteilung generieren kann.

Die Erzeugung speziellerer bekannter diskreter und stetiger Verteilungen folgt in den beiden anschließenden Kapiteln 4 und 5.

Die Erzeugung mehrdimensionaler Verteilungen und mehrdimensionaler stochastischer Abhängigkeiten ist aufwändiger und wird in den Kapiteln 6 und 7 behandelt.

In den letzten drei Kapiteln folgen schließlich noch spezielle Anwendungen für den Finanz- und Versicherungsmarkt.

Literatur:

— Diers, D. (2011): Modellierung versicherungstechnischer Risiken in Internen Modellen - Rüstzeug für Strategieentscheidungen des Managements der Zukunft. In: Ch. Bennemann, L. Oehlenberg und G. Stahl (Hrsg.): Handbuch Solvency II. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Governance-System zu den MaRisk VA. Schäffer-Poeschel-Verlag, Stuttgart, S. 141 - 161.

— Beekmann, F. und Stemper, P. (2014): Beispiel für einen Advanced Measurement Approach zur Quantifizierung des Operationellen Risikos. In: T. Gendrisch, W. Gruber und R. Hahn (Hrsg.): Handbuch Solvabilität. Aufsichtliche Kapitalanforderungen an Kreditinstitute. 2. Auflage, Schäffer-Poeschel-Verlag, Stuttgart, S. 363 - 378.

1. Pseudo-Zufallszahlen

Lernergebnisse:

- Kriterien für „gute“ Zufallsgeneratoren kennen und anwenden;
- Zufallszahlen auf Brauchbarkeit statistisch überprüfen können;
- die Funktion ZUFALLSZAHL() in EXCEL kennen und anwenden.

Praktisch alle computer-orientierten Verfahren zur stochastischen Simulation (Monte Carlo Verfahren) beruhen auf so genannten *Pseudo-Zufallszahlen* z_n, die algorithmisch erzeugt werden und die die Eigenschaften stochastisch unabhängiger, über dem Intervall $[0,1]$ stetig gleichverteilter Zufallsvariablen (so genannte *Standard-Zufallszahlen*) imitieren. Ein klassischer Ansatz stammt aus der Zahlentheorie (Algebra): Hier wählt man

$$\boxed{z_n := \frac{u_n}{m},\ u_{n+1} := a \cdot u_n \mod m}$$

mit geeigneten natürlichen Zahlen $a, m \in \mathbb{N}$ und einem von Null verschiedenen Startwert $0 < u_0 < m$. Die Rechenvorschrift $u_{n+1} := a \cdot u_n \mod m$ bedeutet dabei, dass man den zwischen 0 und $m-1$ liegenden Divisionsrest von $a \cdot u_n$ bei Teilung durch *m* ermittelt. Um zu vermeiden, dass der Algorithmus die Zahl 0 erzeugt, wird für *m* in der Regel eine Primzahl oder Primzahlpotenz verwendet; a und *m* müssen dabei teilerfremd sein.

Beispiel 1:

Wählt man $u_0 = 1$, so ist $u_n = a^n \mod m$. Für den Fall $m = 13$ erhält man folgende Ergebnisse:

a	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Periodenlänge
1	u_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	u_n	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1	12
3	u_n	3	9	1	3	9	1	3	9	1	3	9	1	3
4	u_n	4	3	12	9	10	1	4	3	12	9	10	1	6
5	u_n	5	12	8	1	5	12	8	1	5	12	8	1	4
6	u_n	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11	1	12
7	u_n	7	10	5	9	11	12	6	3	8	4	2	1	12
8	u_n	8	12	5	1	8	12	5	1	8	12	5	1	4
9	u_n	9	3	1	9	3	1	9	3	1	9	3	1	3
10	u_n	10	9	12	3	4	1	10	9	12	3	4	1	6
11	u_n	11	4	5	3	7	12	2	9	8	10	6	1	12
12	u_n	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	2

Auffällig ist hier:

- Die „1“ tritt irgendwann in jeder Folge auf.
- Die Periodenlänge ist die Anzahl der Elemente der Folge bis zum Erreichen der „1“ und ist ein Teiler von $m-1$.
- Die maximal mögliche Periodenlänge ist $m-1$.
- Für die Wahl $a = m-1$ beträgt die Periodenlänge immer 2 (wegen $a^2 = m^2 - 2m + 1 = m(m-2) + 1$, d.h. es bleibt ein Divisionsrest von 1 beim Teilen durch m).

Dies ist die Grundlage eines allgemeinen Satzes der Zahlentheorie, wenn *m* eine Primzahl ist (Euler / Fermat / Lagrange).

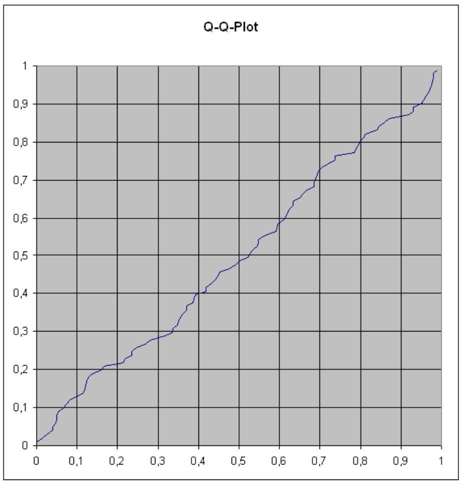
Konsequenz:

- Zur Vermeidung von zu kurzen Periodenlängen und von lokalen Abhängigkeiten müssen die Parameter dieser Methode sehr sorgfältig gewählt werden.
- Wählt man für m eine große Zweierpotenz $m = 2^K$, muss man in diesem Fall $a \equiv 3 \bmod 8$ oder $a \equiv 5 \bmod 8$ wählen, um die maximale Periodenlänge von $2^{K-2} = m/4$ zu erreichen.

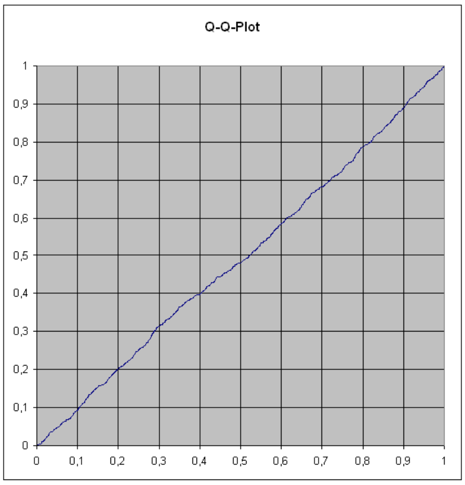
Leider können vor allem im Mehrdimensionalen durch solch einfache Verfahren unerwünschte Nebeneffekte auftreten (z.B. Konzentration konsekutiver Zufallszahlen auf niedrig-dimensionale Gitter). In modernen A nsätzen werden daher Matrix-Multiplikationen verwendet, um von Anfang an höherdimensionale Zufallsvektoren zu erzeugen, oder mehrere rekursive Verfahren, die durch eine geeignete Schieberegister-Technik miteinander verschnitten werden.

In allen Programmiersprachen und Tabellenkalkulationsprogrammen gibt es auch spezifische Befehle bzw. Funktionen für die rechnerische Erzeugung von Standard-Zufallszahlen. In EXCEL ist das z. B. die Funktion ZUFALLSZAHL(). Leider sind die zu Grunde liegenden Algorithmen oft nicht oder nicht ausreichend dokumentiert, so dass man die Anpassungsgüte der verwendeten Zufallszahlen an die stetige Gleichverteilung in jedem Fall z. B. mit Hilfe von Q-Q-Plots überprüfen sollte. Idealerweise sollten die geplotteten Datenpunkte möglichst nahe an der Winkelhalbierenden des Einheitsquadrats liegen.

Die folgenden Graphiken zeigen solche Q-Q-Plots für 100 bzw. 1000 Standard-Zufallszahlen, die mit EXCEL erzeugt wurden.



100 Pseudo-Zufallszahlen

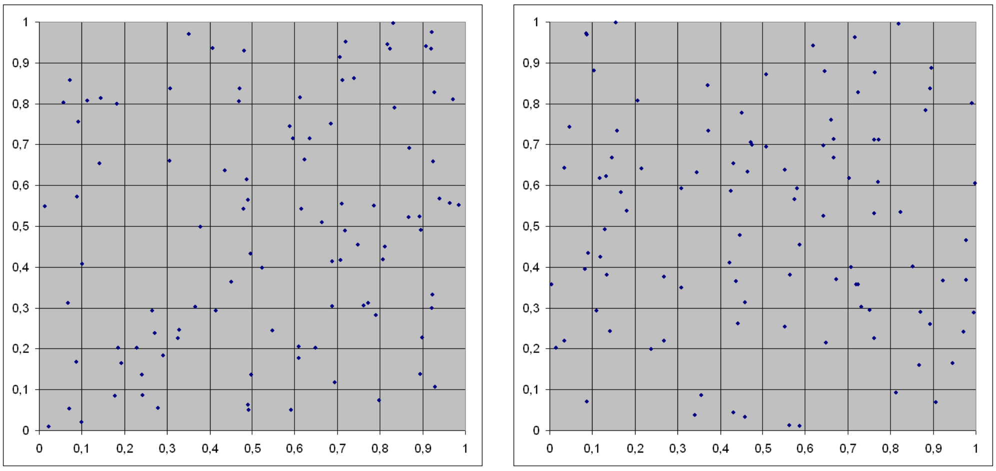


1000 Pseudo-Zufallszahlen

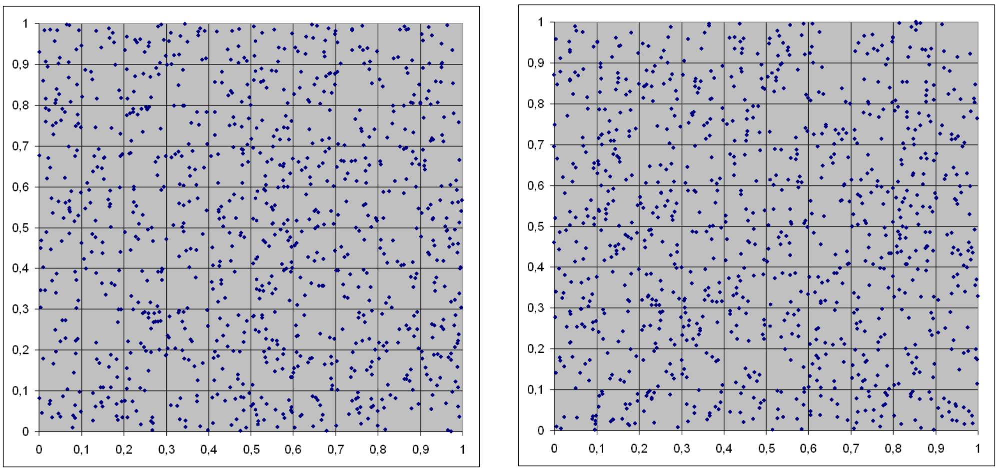
Erwartungsgemäß stabilisiert sich der Q-Q-Plot mit wachsender Zahl der Daten, wenn der Zufallsgenerator „gut“ ist.

Zur visuellen Überprüfung der stochastischen Unabhängigkeit kann man zusätzlich konsekutive Paare von Pseudo-Zufallszahlen gegeneinander plotten. Im Idealfall sollte sich eine möglichst gleichmäßige Verteilung dieser Paare im Einheitsquadrat ergeben.

Die folgenden vier Graphiken wurden wieder mit EXCEL erzeugt.



100 Paare von Pseudo-Zufallszahlen



1000 Paare von Pseudo-Zufallszahlen

Hier scheinen nach dem optischen Eindruck zu urteilen keine besonderen Auffälligkeiten wie z. B. abnorme Häufungen oder Leerstellen in Teilbereichen des Einheitsquadrats vorzuliegen, so dass der Zufallsgenerator akzeptabel ist.

Mit Hilfe von Zufallszahlen kann man auch eine perfekte Kodierung von Nachrichten erreichen. Die Idee ist die folgende:

Man ordnet beispielsweise den 26 Buchstaben des Alphabets a,b,c, ... sowie den zehn Ziffern 0,1, ..., 9 auf eine beliebige Weise die 36 Zahlen 0,1, ... ,35 in einer Kodierungs-Tabelle zu. Den zu verschlüsselnden Text der Länge *n*, der nur aus den 26 Buchstaben bzw. den zehn Ziffern besteht, überführt man dann mit Hilfe der Kodierungs-Tabelle in eine Zahlenfolge $x_1,\cdots,x_n$. Zur eigentlichen Kodierung wird ein fester (reproduzierbarer) Standard-Zufallszahlengenerator $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ verwendet, z.B. wie oben beschrieben mit einer großen Primzahl *m* als Modul und einem geeigneten Faktor *a* sowie einem Startwert $0 < u_0 < m.$ Die kodierte Folge $y_1,\cdots,y_n$ erhält man jetzt mittels der Anweisung

$$y_k := x_k + \lfloor 36 \cdot z_k \rfloor \bmod 35,\ k = 1,\cdots,n.$$

Der Sender der kodierten Botschaft übermittelt also die Folge $y_1,\cdots,y_n$ an den Empfänger, der sie auf folgende Weise dekodiert (mit Hilfe desselben Standard-Zufallszahlengenerators):

$$x_k := y_k - \lfloor 36 \cdot z_k \rfloor \bmod 35,\ k = 1,\cdots,n$$

(mit Werten $x_k \in \{0,1,\cdots,35\}$). Die Übertragung in den Klartext erfolgt abschießend wieder mit Hilfe der Kodierungs-Tabelle.

Warum das Verfahren „perfekt“ ist, erklärt der folgende Sachverhalt:

Ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zahlen mit Werten in der Menge $\{0,1,\cdots,M\}$ mit $M \in \mathbb{N}$ und ist $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die nach der Kodierungsvorschrift

$$y_k := x_k + \lfloor (M+1) \cdot z_k \rfloor \bmod M,\ k \in \mathbb{N}$$

gebildete Folge, so ist $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von gleichverteilten Zufallszahlen über der Menge $\{0,1,\cdots,M\}$, d.h. sie enthält keinerlei sinnvolle Information. Die Dekodierung erfolgt analog zu oben durch

$$x_k := y_k - \lfloor (M+1) \cdot z_k \rfloor \bmod M,\ k \in \mathbb{N}$$

(mit Werten $x_k \in \{0,1,\cdots,M\}$).

Das oben beschriebene Verfahren birgt noch den Nachteil, dass der Empfänger den Zufallsgenerator kennen muss, den der Sender verwendet. Diesen Nachteil kann man wie folgt umgehen:

Der Sender kodiert seinen Text nach dem beschriebenen Verfahren. Der Empfänger verschlüsselt seinerseits die empfangene kodierte Botschaft mit einem eigenen Zufallsgenerator, lediglich die Zahl M und die Kodierungs-Tabelle müssen gleich bleiben. Der Empfänger schickt die doppelt verschlüsselte Nachricht an den Sender zurück, der diese mit seinem eigenen Zufallsgenerator dekodiert. Dabei bleibt die mit dem Zufallsgenerator des Empfängers verschlüsselte Botschaft übrig, die der Sender an den Empfänger zurücksendet. Dieser kann dann mit seinem eigenen Zufallsgenerator die kodierte Botschaft in den Klartext zurückübersetzen.

Beispiel:

Die Kodierungs-Tabelle sei gegeben durch die Zuordnung

$$a \leftrightarrow 0,\ b \leftrightarrow 1, \cdots, z \leftrightarrow 25,\ 0 \leftrightarrow 26,\ 1 \leftrightarrow 27, \cdots, 9 \leftrightarrow 35.$$

Botschaft des Senders:

$$\text{treffenxxxheutexxxabendxxxumxxx18xxxuhr}$$

Der Zufallsgenerator mit der Primzahl $m = 45659,$ dem Faktor $a = 1113$ und dem Startwert $u_0 = 5555$ liefert die Kodierung

$$\text{x5gh0pq0znemq22xst7ckae5le1oqh7jk76ru5x}$$

Der Empfänger verwendet seinerseits den Zufallsgenerator mit der Primzahl $m = 97697,$ dem Faktor $a = 3456$ und dem Startwert $u_0 = 9876$ und sendet folgendes an den Sender:

$$\text{0iqemppyyie1ng7viz4iif0zz8o1qh1hyl0yu4f}$$

Dieser dekodiert die Botschaft mit seinem eigenen Zufallsgenerator zu

$$\text{w3oc0emvwshtr6jvn36hcszrcshzxxrznbr4ug8}$$

und sendet dies zurück an den Empfänger, der wie folgt dekodiert:

$$\text{treffenxxxheutexxxabendxxxumxxx18xxxuhr}$$

Aufgabe zur Lernkontrolle

Jemand schlägt Ihnen folgende Methode zur Erzeugung von Standard-Zufallszahlen vor:

— Wähle eine große Primzahl $m > 3$ als Modul und einen Startwert $u_0 \in \{2,3,\cdots,m-2\}$.

— Berechne rekursiv $u_{n+1} := u_n^2 \bmod m$ für $n \in \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\cdots\}$.

— Setze $z_n := \dfrac{u_n}{m}$.

— Wie beurteilen Sie die Brauchbarkeit dieses Verfahrens für die Praxis?

Literatur zur Vertiefung

— Kolonko, M. (2008): Stochastische Simulation. Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen. Vieweg+Teubner, Wiesbaden. [Kapitel I, Unterkapitel 2 bis 6]